

مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى

الإشتقاق وتطبيقاته

اشتقاق الدوال المثلثية :

الدالة	المشتقة
جا س	جتا س
جتا س	– جا س
ظا س	$قا^2$ س
ظتا س	– $قتا^2$ س
قا س	قا س ظا س
قتا س	– قتا س ظتا س

الاشتقاق الضمنى :

اشتقاق العلاقة الضمنية: د (س ، ص) = صفر يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى :

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وُجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو ص// والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ أو ص///

و المشتقة النونية بالرمز $ص^{(ن)}$ أ، $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ أ، $د^{(ن)}$(س)

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى :

إذا كان : م هو ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) الواقعة عليه فإن :

معادلة المماس للمنحنى هى : ص – $ص_1$ = م (س – $س_1$)

معادلة العمودى للمنحنى هى : ص – $ص_1$ = – $\frac{1}{م}$ (س – $س_1$)

المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت : ص = د (س) ، س تتغير تبعًا لتغير الزمن ن ، فإن : ص تتغير أيضًا تبعًا لتغير الزمن ن

أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص

- يكون المعدل موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.
- يكون المعدل سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

العدد هـ :

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = هـ$ ، $\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} (1 + س)^{\frac{1}{س}} = هـ$

$\underset{س \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{أ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} أ$ ، أ > ٠ ، $\underset{س \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{لو_{أ}(1+س)}{س} = لو_{أ} هـ$ ، أ > ٠

$\underset{س \to \text{صفر}}{\text{نهـا}} \frac{لو_{هـ}(1+س)}{س} = 1$

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي : دالة أسية أساسها هـ حيث د (س) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ح

دالة اللوغاريتم الطبيعي : دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث د (س) = $لو_{هـ}$ س ، س ∈ $ح^{+}$

التفاضل اللوغاريتمي: العلاقة بين المتغيرات يمكن ان تمثل بالصيغة اللوغريتمية وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة وباستخدام خواص اللوغاريتمات يتم تبسيط العلاقة قبل اجراء عمليات التفاضل.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي:

إذا كان س ∈ $ح^{+}$ ، ص ∈ ح ، أ ∈ $ح^{+}$-{١} فإن :

(١) الصيغة ص = $لو_{هـ}$ س تكافئ الصيغة س = $هـ^{ص}$

(٢) س = $هـ^{لو_{هـ} س}$ (٣) $لو_{هـ}$ هـ = ١ (٤) $لو_{هـ}$ ١ = صفر (٥) $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$

إذا كان $س \in ح^{+}$ ، $ص \in ح^{+}$ ، $ن \in ح$ فإن :

(٦) $لو_{هـ} س ص = لو_{هـ} س + لو_{هـ} ص$ (٧) $لو_{هـ} \frac{س}{ص} = لو_{هـ} س - لو_{هـ} ص$

(٨) $لو_{هـ} س^{ن} = ن \, لو_{هـ} س$ (٩) $لو_{م} س \times لو_{س} م = ١$

			تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية		
الدالة	المشتقة	الشرط	الدالة	التكامل	الشرط
$هـ^{س}$	$هـ^{س}$	$س \in ح$	$هـ^{س}$	$هـ^{س} + ث$	$س \in ح$
$هـ^{د(س)}$	$هـ^{د(س)} \cdot د^{/}(س)$	د قابلة للاشتقاق	$هـ^{ك س}$	$\frac{١}{ك} هـ^{ك س} + ث$	$ك \neq ٠$
$م^{س}$	$م^{س} لو_{هـ} م$	$م > ٠ ، م \neq ١$	$هـ^{د(س)} \cdot د^{/}(س)$	$هـ^{د(س)} + ث$	د قابلة للاشتقاق
$لو_{هـ} \vert س \vert$	$\frac{١}{س}$	$س \neq ٠$	$\frac{١}{س}$	$لو_{هـ} \vert س \vert + ث$	$س \neq ٠$
$لو_{هـ} \vert د(س) \vert$	$\frac{١}{د(س)} \cdot د^{/}(س)$	د قابلة للاشتقاق ، $د(س) \neq ٠$	$\frac{١}{د(س)} \cdot د^{/}(س)$	$لو_{هـ} \vert د(س) \vert + ث$	د قابلة للاشتقاق ، $د(س) \neq ٠$

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

☎ اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- ❖ وكان $د^{/}(س) > ٠$ لجميع قيم $س \in$] ا ، ب [فإن : د متزايدة على] ا ، ب [
- ❖ وكان $د^{/}(س) < ٠$ لجميع قيم $س \in$] ا ، ب [فإن : د متناقصة على] ا ، ب [

☎ النقطة الحرجة :

للدالة د المتصلة على [ا ، ب] نقطة حرجة (حـ ، د(حـ))

إذا كانت : $حـ \in$] ا ، ب [، $د^{/}(حـ) = ٠$ أو $د^{/}(حـ)$ غير موجودة

☎ القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة :

إذا كانت د دالة معرفة على [ا ، ب] ، وكانت $حـ \in$ [ا ، ب]

➜ د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∋ [ا ، ب]

➜ د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∋ [ا ، ب]

☎ اختبار المشتقة الاولى للقيم القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية :

إذا كانت (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

- ❖ د/(س) > ٠ عندما س < حـ ، د/(س) < ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ❖ د/(س) < ٠ عندما س < حـ ، د/(س) > ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ نظرية:

إذا كانت د قابلة للاشتقاق علي] ا ، ب [و كان للدالة د قيمة عظمى محلية أو قيمة صغري محلية

عند حـ ∋] ا ، ب [فإن د/(حـ) = صفر أو د/(حـ) غير معرفة .

☎ اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [، وكانت حـ ∋] ا ، ب [حيث د/(حـ) = ٠

- ➢ إذا كانت : د//(حـ) < ٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية
- ➢ إذا كانت : د//(حـ) > ٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ تحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت : د/ متزايدة على هذه الفترة.
- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأعلى إذا كانت : د/ متناقصة على هذه الفترة.

☎ اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [فإنه :

- د//(س) > ٠ لجميع قيم س ∋] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل على] ا ، ب [
- د//(س) < ٠ لجميع قيم س ∋] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى على] ا ، ب [

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة] ا ، ب [وكانت حـ ∋] ا ، ب [وكان لمنحني الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د(حـ)) فان هذه النقطة تسمي نقطة انقلاب لمنحني الدالة د إذا تغير تحدب منحني الدالة عند هذه النقطة من محدب لاسفل الي محدب لاعلي او من محدب لاعلي الي محدب لاسفل

التكامل المحدد وتطبيقاته

تفاضلى الدالة :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س فإن :

- ✓ تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ءص) = د/(س) ءس
- ✓ تفاضلى س (ويرمز له بالرمز ءس)

التكامل بالتعويض :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

فإذا كانت : ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن : ∫ د (ر(س)) ر/(س) ءس = ∫ د (ع) ءع

التكامل بالتجزئ :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين والتى ليست احداهما مشتقة للأخرى.

فإذا كانت ص ، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف

فإن : ∫ ص ءع = ص ع − ∫ ع ءص

قواعد التكاملات الأساسية :

- ← ∫ $س^{ن}$ ءس = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$ + ث حيث ن ≠ −١
- ← ∫ قاس ظاس ءس = قا س + ث

س ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}$ π ، ن ∈ ص

- ← ∫ جاس ءس = − جتا س + ث
- ← ∫ قتاس ظتاس ءس = − قتا س + ث

س ≠ π ن ، ن ∈ ص

- ← ∫ جتاس ءس = جا س + ث
- ← ∫ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + ث
- ← ∫ $قا^{٢}$س ءس = ظا س + ث
- ← ∫ $\frac{١}{س}$ ءس = $لو_{هـ}$ |س| + ث ، س ≠ صفر

س ≠ $\frac{٢ن+١}{٢}$ π ، ن ∈ ص ،

- ← ∫ $قتا^{٢}$س ءس = − ظتا س + ث   س ≠ π ن ، ن ∈ ص ،

التكامل المحدد :

إذا كانت الدالة د متصلة على [ا ، ب] وكانت (ت) أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\int_{ا}^{ب}$ د (س) ءس = ت (ب) − ت (ا)

خواص التكامل المحدد :

- $\int_{ا}^{ب}$ د (س) ءس = − $\int_{ب}^{ا}$ د (س) ءس $\int_{ا}^{ا}$ د (س) ءس = صفر
- $\int_{ا}^{ب}$ د (س) ءس = $\int_{ا}^{حـ}$ د (س) ءس + $\int_{حـ}^{ب}$ د (س) ءس   حيث : حـ ∈ [ا ، ب]
- $\int_{-ا}^{ا}$ د (س) ءس = صفر   حيث : د دالة فردية
- $\int_{-ا}^{ا}$ د (س) ءس = ٢ $\int_{٠}^{ا}$ د (س) ءس   حيث : د دالة زوجية

المساحات :

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :

س = ا ، س = ب حيث : د (س) ≥ ٠ هى : م = $\int_{ا}^{ب}$ |د (س)| ءس

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :

س = ا ، س = ب حيث : د (س) ≥ ر (س) هى : م = $\int_{ا}^{ب}$ | د (س) − ر (س) | ءس

الحجوم الدورانية :

ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على [ا ، ب] ومحور السينات والمستقيمين : س = ا ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) ≥ ٠

ع = π $\int_{ا}^{ب}$ [د (س)]^{٢} ءس

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على [ا ، ب]

والمستقيمين : س = ٢ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) ≤ ر(س)

$$ح = \pi \int_{٢}^{ب} | (د(س))^٢ - (ر(س))^٢ | \, ءس$$